

# Apfelmännchen für Schüler

Erklärung von kapslog.de

Stand Januar 2010

Wenn es um schöne mathematische Gebilde geht, kommt man an der Mandelbrot-Menge (auch als „Apfelmännchen“ bezeichnet) kaum vorbei. Um zu erklären, wie dieses Gebilde zustande kommt, werden normalerweise komplexe Zahlen verwendet, die aber in der Schule kaum unterrichtet werden.

Da eigentlich kein besonders gutes Verständnis von komplexen Zahlen notwendig ist, um solche Bilder berechnen zu können, will ich hier kurz erklären wie es mit gängigen Schulmitteln geht. Wer sich hauptsächlich für die Mathematik interessiert, kann sich auf die ersten Abschnitte konzentrieren, und wer lieber nur programmiert darf diese gerne überspringen und gleich bei „Wie kann ich das programmieren?“ weiterlesen.

## Was sind komplexe Zahlen?

Komplexe Zahlen sind eine Erweiterung der, aus der Schule bekannten, reellen Zahlen. Wichtig ist für diese Zahlen die Zahl  $i$ , die sogenannte imaginäre Einheit.  $i$  ist definiert als die Zahl, die mit sich selbst multipliziert  $-1$  ergibt,  $i$  ist also eine Wurzel aus  $-1$  (wenn man nur mit reellen Zahlen rechnet lässt sich die Wurzel aus  $-1$  ja bekanntlich nicht ziehen).

Alle komplexen Zahlen lassen sich grundsätzlich als Summe aus einer reellen Zahl und einer reellen Zahl die mit  $i$  multipliziert wurde darstellen (es gibt auch andere Darstellungen, aber die brauchen wir hier nicht). Für jede komplexe Zahl  $z$  gibt es also reelle Zahlen  $a$  und  $b$ , sodass gilt  $z = a + bi$ .

## Die Mandelbrot-Menge

Die Mandelbrot-Menge ist definiert als die Menge der komplexen Zahlen  $c$ , für die die Folge  $z_{n+1} = z_n^2 + c$  mit  $z_0 = 0$  beschränkt bleibt. Das bedeutet, man muss jeweils das vorangegangene Ergebnis für  $z$  quadrieren und dann dazu  $c$  addieren, um an das nächste Glied von  $z$  zu gelangen, das dann wieder Ausgangspunkt für den nächsten Rechendurchgang ist. Wenn für den gewählte Wert von  $c$  die Werte von  $z$  nicht gegen unendlich gehen<sup>1</sup>, ist  $c$  Teil der Mandelbrot-Menge. Um in den Randbereichen einigermaßen sicher sein zu können, ob eine Zahl  $c$  noch zur Mandelbrot-Menge dazugehört oder nicht, muss man unter Umständen hunderte oder tausende Folgenglieder berechnen.

## Die Folge mit reellen Zahlen

Um mit reellen Zahlen rechnen zu können muss man die Gleichung  $z_{n+1} = z_n^2 + c$  etwas umformen. Ich definiere die reellen Zahlen  $a$ ,  $b$ ,  $x_n$  und  $y_n$  so, dass gilt  $c = a + bi$  und  $z_n = x_n + y_n i$ . Wenn man dies in die Gleichung einsetzt

erhält man (Umformung nach binomischer Formel):

$$x_{n+1} + y_{n+1}i = (x_n + y_n i)^2 + a + bi$$

$$x_{n+1} + y_{n+1}i = x_n^2 + 2x_n y_n i + y_n^2 i^2 + a + bi$$

Da  $i^2 = -1$  ist erhalten wir

$$x_{n+1} + y_{n+1}i = x_n^2 + 2x_n y_n i - y_n^2 + a + bi$$

und nach Umsortieren Ausklammern von  $i$

$$x_{n+1} + y_{n+1}i = x_n^2 - y_n^2 + a + (2x_n y_n + b)i$$

Bis auf das  $i$  sind alle Variablen reelle Werte, das heißt der reelle Teil  $x_{n+1}$  der linken Seite muss dem reellen Teil  $x_n^2 - y_n^2 + a$  der rechten Seite entsprechen, und auch die mit  $i$  multiplizierten Teile auf beiden Seiten der Gleichung müssen einander entsprechen:

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a \quad (1)$$

$$y_{n+1} = 2x_n y_n + b \quad (2)$$

Dies lässt sich nun ohne Kenntnis von komplexen Zahlen berechnen, wenn  $a$  und  $b$  bekannt sind ( $x_0 = y_0 = 0$ ).

## Wie kann ich das programmieren?

Um die Mandelbrot-Menge darstellen zu können, berechnet man für jeden Punkt des Bildes die Folge mit seinen Koordinaten  $a$  (üblicherweise nach rechts) und  $b$  (nach oben) entsprechend den Gleichungen (1) und (2) oben. Dazu setzt man eine maximale Anzahl an Iterationen (das heißt Anzahl an Folgengliedern die berechnet werden) und prüft nach jeder Iteration ob  $x^2 + y^2 > 4$  ist. Falls ja, ist der Punkt mit den Koordinaten  $a$  und  $b$  definitiv nicht Teil der Mandelbrot-Menge. Wenn diese Bedingung nach einer bestimmten Anzahl an Iterationen noch nicht erfüllt ist, kann man mit hoher Wahrscheinlichkeit davon ausgehen, dass er Teil der Mandelbrot-Menge ist (je höher die Anzahl der Iterationen desto sicherer das Ergebnis). Die Punkte, die zur Mandelbrot-Menge gehören, werden dann (meist schwarz) eingefärbt.

## Schöner, bunter, detaillierter!

Wer nach Möglichkeiten sucht, sein Programm zu optimieren, kann zum Beispiel, abhängig von der Anzahl an Iterationen, nach der die Berechnung abgebrochen wurde, die Außenbereiche unterschiedlich einfärben. Eine schnelle und einfache Zoomfunktion ist ebenfalls sehr praktisch, wenn es darum geht die spannenden Bereiche am Rand des „Apfelmännchens“ zu erkunden. Hier kann es dann auch sinnvoll sein, die Anzahl der maximalen Iterationen variieren zu können, um bessere Ergebnisse zu bekommen . . .

Wer Spaß am Programmieren hat, kann sich hier also eine Weile beschäftigen.

*Zusätzliche Bilder, Code und Programme auf kapslog.de*

<sup>1</sup>Man kann zeigen, dass sie gegen unendlich gehen, wenn für ein Folgenglied als komplexe Zahl der Form  $z = x + yi$  dargestellt  $\sqrt{x^2 + y^2} > 2$  gilt.