Apfelmännchen für Schüler

Erklärung von kapslog.de

Überarbeitet im März 2012

Wenn es um schöne mathematische Gebilde geht, kommt man an der Mandelbrot-Menge (auch als „Apfelmännchen“ bezeichnet) kaum vorbei. Um zu erklären, wie dieses Gebilde zustande kommt, werden normalerweise komplexe Zahlen verwendet, die aber in der Schule kaum unterrichtet werden.

Da kein besonders tiefes Verständnis von komplexen Zahlen notwendig ist, um solche Bilder berechnen zu können, will ich hier kurz zeigen, wie es mit Schulkenntnissen funktioniert. Wer sich hauptsächlich für die Mathematik interessiert, kann sich auf die ersten Abschnitte konzentrieren. Wer lieber nur programmiert darf diese gerne überspringen und gleich bei „Wie kann ich das programmieren?“ weiterlesen.

Was sind komplexe Zahlen?

Komplexe Zahlen sind eine Erweiterung der, aus der Schule bekannten, reellen Zahlen. Wichtig ist für diese Zahlen die Zahl i, die sogenannte imaginäre Einheit. i ist definiert als eine Zahl, die mit sich selbst multipliziert -1 ergibt, i ist also eine Wurzel[1] aus -1 (wenn man nur mit reellen Zahlen rechnet lässt sich die Wurzel aus -1 ja bekanntlich nicht ziehen).

Alle komplexen Zahlen lassen sich grundsätzlich als Summe aus einer reellen Zahl und einer reellen Zahl die mit i multipliziert wurde darstellen (es gibt auch andere Darstellungen, aber die brauchen wir hier nicht). Für jede komplexe Zahl z gibt es also reelle Zahlen a und b, sodass gilt $z = a + b\mathrm{i}$, wobei a als Realteil und b als Imaginärteil von z bezeichnet wird.

Die Mandelbrot-Menge

Die Mandelbrot-Menge ist definiert als die Menge der komplexen Zahlen c, für die die Folge $z_{n+1} = z_n^2 + c$ mit $z_0 = 0$ für $n \to \infty$ beschränkt bleibt. Das bedeutet, man muss jeweils das vorangegangene Ergebnis für z quadrieren und dann dazu c addieren, um an das nächste Glied von z zu gelangen, das dann wieder Ausgangspunkt für den nächsten Rechendurchgang ist. Wenn für den gewählte Wert von c die Werte von z nicht gegen unendlich gehen[2], ist c Teil der Mandelbrot-Menge. Um in den Randbereichen einigermaßen sicher sein zu können, ob eine Zahl c noch zur Mandelbrot-Menge dazugehört oder nicht, muss man unter Umständen hunderte oder tausende Folgenglieder berechnen. Für die Darstellung färbt man alle c, die zur Mandelbrot-Menge gehören ein, wobei im Koordinatensystem der Realteil von c nach rechts und der Imaginärteil nach oben abgetragen wird.

Die Folge mit reellen Zahlen dargestellt

Um mit reellen Zahlen rechnen zu können muss man die Gleichung $z_{n+1} = z_n^2 + c$ etwas umformen. Ich definiere die reellen Zahlen a und b als Real- und Imaginärteil von c, sowie x_n und y_n als Real- und Imaginärteil von z_n. Damit ist $c = a + b\mathrm{i}$ und $z_n = x_n + y_n\mathrm{i}$. Wenn man dies in die Gleichung der Mandelbrot-Menge einsetzt erhält man:

$$x_{n+1} + y_{n+1}\mathrm{i} = (x_n + y_n\mathrm{i})^2 + a + b\mathrm{i}$$

Umgeformt nach binomischer Formel ergibt sich:

$$x_{n+1} + y_{n+1}\mathrm{i} = x_n^2 + 2x_ny_n\mathrm{i} + y_n^2\mathrm{i}^2 + a + b\mathrm{i}$$

Da $i^2 = -1$ ist erhalten wir

$$x_{n+1} + y_{n+1}\mathrm{i} = x_n^2 + 2x_ny_n\mathrm{i} - y_n^2 + a + b\mathrm{i}$$

und nach Umsortieren und Ausklammern von i

$$x_{n+1} + y_{n+1}\mathrm{i} = x_n^2 - y_n^2 + a + (2x_ny_n + b)\mathrm{i}$$

Bis auf das i sind alle Variablen reelle Werte, das heißt der reelle Teil x_{n+1} der linken Seite muss dem reellen Teil $x_n^2 - y_n^2 + a$ der rechten Seite entsprechen, und auch die mit i multiplizierten Teile auf beiden Seiten der Gleichung müssen einander entsprechen:

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a \tag{1}$$

$$y_{n+1} = 2x_ny_n + b \tag{2}$$

Dies lässt sich nun ohne Kenntnis von komplexen Zahlen berechnen, wenn c und damit auch a und b bekannt sind (Da $z_0 = 0$ ist, ist auch $x_0 = y_0 = 0$).

Wie kann ich das programmieren?

Um die Mandelbrot-Menge darstellen zu können, berechnet man für jeden Punkt des Bildes die Folge mit seinen Koordinaten a (nach rechts) und b (nach oben) entsprechend den Gleichungen (1) und (2) oben. Dazu setzt man eine maximale Anzahl an Iterationen (das heißt Anzahl an Folgengliedern die berechnet werden) und prüft nach jeder Iteration ob $x^2 + y^2 > 4$ ist. Falls ja, ist der Punkt mit den Koordinaten a und b definitiv nicht Teil der Mandelbrot-Menge. Wenn diese Bedingung nach einer bestimmten Anzahl an Iterationen noch nicht erfüllt ist, kann man mit hoher Wahrscheinlichkeit davon ausgehen, dass er Teil der Mandelbrot-Menge ist (je höher die Anzahl der Iterationen desto sicherer das Ergebnis). Die Punkte, die zur Mandelbrot-Menge gehören, werden dann (meist dunkel) eingefärbt.

Schöner, bunter, detaillierter!

Wer nach Möglichkeiten sucht, sein Programm zu optimieren, kann zum Beispiel, abhängig von der Anzahl an Iterationen, nach der die Berechnung abgebrochen wurde, die Außenbereiche unterschiedlich, evtl. auch bunt, einfärben. Eine schnelle und einfache Zoomfunktion ist ebenfalls sehr praktisch, wenn es darum geht die spannenden Bereiche am Rand des „Apfelmännchens“ zu erkunden.

Wer Spaß am Programmieren hat, kann sich hier also eine Weile beschäftigen.

Bilder, Quellcode und Programme gibt ’s auf kapslog.de

[1] Genau genommen gibt es in den komplexen Zahlen zwei Lösungen für $z = \sqrt{-1}$ bzw. $z^2 = -1$, nämlich $z_1 = \mathrm{i}$ und $z_2 = -\mathrm{i}$.

[2] Man kann zeigen, dass die Folge gegen unendlich geht, wenn für ein Folgenglied in der Form $z = a + b\mathrm{i}$ dargestellt $\sqrt{a^2 + y^2} > 2$ ist.